PROBLEMAS DIDÁCTICOS CON LOS NÚMEROS DECIMALES

Edison De Faria Campos[1]
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen

Ciertos aprendizajes pueden convertirse en obstáculos epistemológicos para futuros aprendizajes. En particular, analizaremos varios obstáculos relacionados con la didáctica de los números decimales e ilustraremos algunas situaciones didácticas sugeridas principalmente por Brousseau para lograr superarlos.

Palabras clave: Teoría de situaciones didácticas, obstáculos epistemológicos, transposición didáctica.

Introducción

El Tercer Estudio Internacional repetido de Matemática y Ciencias (TIMSS-R) llevado a cabo en 1999 mostró que en el ámbito internacional, únicamente cerca del 50% de estudiantes de 13 años de edad pudieron seleccionar el menor número decimal en una lista de cinco números.

Otros estudios longitudinales concluyeron que los errores cometidos al comparar números decimales son persistentes y que siguen cierta lógica (tabla 1, citada en Steinle, 2004).

Tabla 1: Estudios longitudinales llevados a cabo entre 1980 y 1990		Edad aproximada de los estudiantes					
		11	12	13	14	15	15+
Brown (1981) CSMS			% correcto				
1) Mayor	0.75 0.8		57	65	69	75	
2) Mayor	4.06 4.5		66	72	83	80	
Carpenter et al. (1981) NAEP2							
1) Mayor	0.23 1.9			81			
2) Mayor	1.15 1.36			79			
3) Mayor	.036 .19 .195 .2			46			
Grossman (1983)							
1) Menor	0.07 0.075 0.08 0.3 1.003						29
2) Menor	0.004 0.03001 0.05 0.1 1.0003						31
Foxman et al. (1985) APU							
1)	0.07 0.1 0.23	23					

[1] Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, CIMM
Asociación de Matemática Educativa, ASOMED

Ordenar 2)	0.1 0.3 0.6 0.7	75					
Ordenar 3) Menor	0.125 0.25 0.375 0.5	17					
4) Mayor	0.075 0.089 0.09 0.1					82	
5) Menor	0.075 0.089 0.09 0.1					47	
6) Mayor	0.125 0.25 0.375 0.5 0.625					61	
7) Menor	0.125 0.25 0.375 0.5 0.625					37	
8) Menor	0.125 0.25 0.3753 0.5 0.625					43	
Hiebert & Wearne (1986)							
Mayor	.09 .1814 .3 .385	0				43	
Kouba et al. (1989) NAEP4							
Mayor	0.058 0.36 0.375 0.4		50				
Putt (1995)							
Ordenar	0.060 0.0666 0.6 0.606 0.66						51
Brekke (1996)							
1) Mayor	3.521 3.6 3.75	20		64		88	
2) Mayor	0.649 0.7 0.87	22		62		83	
3) Menor	0.125 0.25 0.3753 0.5 0.625	16		55		79	
Fuglestad (1998)							
Ordenar	0.25 0.375 0.5 0.62	20	35	62			
TIMSS-R (1999)							
Menor	0.125 0.25 0.375 0.5 0.625				46		

Notemos por ejemplo que ningún estudiante de 11 años de edad logró seleccionar correctamente el mayor entre los números .09, .1814, .3 y .385 (Hiebert & Wearne, 1986, citado en Steinle, 2004).

Steinle (2004) encontró que los dos principales comportamientos incorrectos exhibidos por los estudiantes al comparar números decimales son:

- Más largo es mayor (comportamiento L)

  Seleccionar como mayor el decimal que tenga un mayor número de dígitos después del punto decimal.

- Más corto es mayor (comportamiento S)

  Seleccionar como mayor el decimal que tenga un menor número de dígitos después del punto decimal.

Los comportamientos anteriores son fuentes sistemáticas de errores que persisten con la edad.

Putt (1995, citado en Steinle, 2004) efectuó una prueba con aproximadamente 700 estudiantes universitarios. Mientras que 51% logró ordenar correctamente los decimales, el 36% seleccionó 0.6 como el mayor entre los cinco números: 0.060, 0.66, 0.606, 0.6, 0.0666 (correspondiendo al comportamiento S). Grossman (1983, citado en Steinle, 2004) reportó los resultados de dos versiones de las pruebas de ingreso a la Universidad de Nueva York. De los más de 7000 estudiantes que hicieron la prueba, más del 40% seleccionó 0.1 como el mayor entre los cinco decimales: 0.004, 0.03001, 0.05, 0.1, 1.0003 (correspondiendo al comportamiento S).

Steinle (2004) logró detectar algunas causas de los errores cometidos por los estudiantes al comparar decimales. Por ejemplo, estudiantes que seleccionaron 0.3 como mayor que 0.4 utilizaron:

- Pensamiento recíproco

  Debido a la identificación de 0.3 con 1/3 y 0.4 con 1/4. Ellos conocían del estudio de fracciones que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ y que por lo tanto $0.3 > 0.4$

- Pensamiento negativo

  Al confundir los decimales con los números negativos. Como $-3 > -4$ entonces $0.3 > 0.4$

La explicación más generalizada dada por los estudiantes que exhibieron un pensamiento correspondiente al comportamiento S que lograron comparar correctamente $0.4 > 0.3$ pero que seleccionaron incorrectamente $4.3 > 4.65$ es que cualquier número con un decimal tiene que ser mayor que cualquier número con dos decimales pues los décimos son mayores que los centésimos, es decir, 3 décimos en 4.3 es mayor que 65 centésimos en 4.65. Esta conexión descuidada de los decimales con el sistema métrico decimal puede conducir a estas concepciones inadecuadas.

Por otro lado, el comportamiento L se debe a una generalización inapropiada de las propiedades de los números naturales. Así por ejemplo, $0.3425 > 0.751$ porque $3425 > 751$, es decir, si eliminamos el 0. en ambos números entonces podemos comparar los decimales como si fueran enteros. Esto también se presta a comparaciones correctas pero utilizando razonamiento incorrecto como $0.0071 < 0.123$ porque $71 < 123$ (los ceros antes del 7 no son significativos).

Otro tipo de obstáculo ocurre al utilizar conocimientos que son verdaderos con los números enteros y generalizarlos equivocadamente con los decimales. Respecto a la densidad de los números, sabemos que no existe un número entero entre dos enteros consecutivos, por ejemplo entre 3 y 4. Algunos estudiantes consideran que no existe ningún número entre dos decimales aparentemente consecutivos como por ejemplo 0.3 y 0.4.

Para Brousseau (1997) un obstáculo no es únicamente un error debido a la ignorancia, incertidumbre o azar, sino que es el efecto de un conocimiento anterior que es correcto en cierto dominio pero que es incorrecto o inapropiado en otros dominios. Un obstáculo se manifiesta por los errores, que no son debidos al azar, no son fugaces ni erráticos, son reproducibles y persistentes.

Como un obstáculo es un conocimiento, franquearlo exige un trabajo de la misma naturaleza que la que produjo el conocimiento, es decir, de interacciones repetidas y dialécticas del estudiante con el objeto de su conocimiento. Según Brousseau (1997) un obstáculo puede tener distintos orígenes:

- Ontogenético

  Los que provienen de limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo. La psicología genética evidencia los estados y los medios de desarrollo.
- Didáctico

  Los que parecen no depender únicamente de una escogencia o de un sistema educativo.

- Epistemológico

  Los que no podemos escapar debido al hecho mismo de su papel constitutivo dentro del conocimiento. Se pueden encontrar en la misma historia de los conceptos.

Las condiciones para que algo sea declarado un obstáculo (en el sentido de Bachelard) son:

1. Que sea un conocimiento
2. Tenga un dominio de validez
3. Resista y reaparezca
4. Sea constitutivo del saber

Brousseau (1997) analizó el currículo típico de los años 60 y 70 en Francia y el efecto epistemológico de la reforma de 1970 sobre las concepciones de los estudiantes y profesores acerca de los decimales.

La enseñanza de los decimales en Francia en los 60.

La práctica de la enseñanza de los decimales fue la presentada en un texto muy utilizado a partir de 1936 (*Arithmétique nouvelle au tours moyen*, escrito por R. Jolly, citado en Brousseau, 1997).

El texto empieza con una revisión de mediciones de longitud con una regla graduada. Se define los submúltiplos del metro – que en realidad son múltiplos de una unidad menor, el milímetro. Los estudiantes deberían escribir los resultados de las operaciones en la forma de un número decimal. Aparece por primera vez la palabra *entero* para distinguir un número sin una parte decimal de un número decimal que tiene una parte entera, otra decimal y además una indicación de la unidad – por lo tanto, para el autor del texto, los números enteros no son decimales.

El texto presentaba tablas con mediciones en metros y otras columnas para que los estudiantes las completaran con sub unidades del metro, lo que representaba división por diez.

El texto también sugería el aprendizaje de multiplicación de un decimal por 10, 100 y 1000 y posteriormente por un número natural, después la multiplicación de un número entero por un número decimal y finalmente la multiplicación de dos decimales. Así, para multiplicar un entero por un decimal, implicaba convertir el decimal en entero mediante un cambio de unidades de medición (pero sin indicar la nueva unidad), multiplicar los dos enteros y posteriormente volver a la unidad patrón.

Posteriormente se pasaba a la división: de un natural por otro natural, de un decimal por 10, 100 y 1000; de un número decimal por otro natural; natural por decimal y finalmente se dividía decimal por decimal. Se supone que cada paso del algoritmo es explicado por el paso precedente, pero en realidad las explicaciones no aparecían explícitamente.

La justificación de la división por un número decimal, con la respectiva eliminación de la unidad, se basaba en la propiedad establecida por los números naturales- extendida sin comentarios a decimales – de la invariancia del cociente bajo la multiplicación de dividendo y divisor por un mismo número.

Las fracciones decimales eran introducidas antes de las ordinarias, como una nueva notación para los números decimales estudiados. Las primeras lecciones eran dedicadas a la reformulación de las reglas de cálculo de los decimales en términos de operaciones de fracciones. Así por ejemplo, $\frac{3}{10}$ es una fracción decimal, pero $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ etc. son fracciones ordinarias.

Se partía del principio de que el cociente de dos números arbitrarios siempre será un decimal exacto o bien un decimal aproximado. El estudiante tenía que llevar a cabo la división hasta obtener una precisión razonable dependiendo del contexto.

Características y consecuencias de la opción curricular anterior

Las concepciones dominantes sobre los decimales en la década de los 60 según Brousseau (1997) fueron:

a) Los números decimales siempre eran expresiones de mediciones (en un sentido no matemático)
b) Estas mediciones ocurrían en un sistema métrico.
c) Un decimal era definido como un número natural unido a una indicación de la unidad y con un punto decimal que indicaba el lugar de la unidad. Así, un número entero no era un número decimal.
d) Los cálculos algorítmicos eran presentados como los mismos utilizados para los números naturales mediante conversiones de unidades.

Las consecuencias de estas concepciones para la multiplicación de decimales fueron las siguientes:

a) Limitación
   Un decimal sin unidades de medida no tenía sentido.
b) Producto sin interpretación

3.25 m x 4 podía ser visto como una suma 3.25+3.25+3.25+3.25 como en el caso de los números naturales. Pero 4m x 3.25 no tenía sentido si el 3.25 no fue obtenido mediante la "evaporación de la unidad". No se concebía utilizar la equivalencia 4m x 3.25 = 3.25m x 4.

Para seguir dando una representación concreta al producto de dos decimales se hacía necesario restringir su uso a los casos de producto de medidas (área de figuras geométricas por ejemplo) o al isomorfismo de medidas (el precio de una cantidad no discreta por ejemplo). En el caso del área lo que se hacía era omitir (evaporar) la unidad común de los factores y multiplicar los dos números.

La distinción entre parte entera y parte decimal provenía de métodos de mediciones y evaluaciones, especialmente en los cálculos en dónde la operación sobre la parte entera proporciona el orden de magnitud. El problema es que los estudiantes intentaban seguir ciertas reglas para la parte entera del número y otras reglas para la parte decimal. Por ejemplo, $3.9 < 3.12$ pues $9 < 12$ o bien $2.3 x 2.3 = 4.9$. Los números decimales eran identificados con la parte decimal, es decir, con la menor unidad de medición. De esta forma los estudiantes tenían muchas dificultades en encontrar un número de un único dígito después del punto decimal que fuera mayor que 0.9.

Otro obstáculo consistía en la idea de que toda medición proporcionaba un número aproximado con una parte despreciable. Así, en la división el resultado se presentaba ocultando una sucesión infinita de decimales debido a que éstos no tenían importancia.

La enseñanza de decimales en los 70

La reforma de los 70 en Francia surgió en reacción a los problemas presentados anteriormente.

Para medir áreas de superficies los estudiantes utilizaban bloques multibase de Diénès para cubrir la superficie y contaban los azulejos cubiertos (la unidad era un azulejo). Habían 7 tipos de bloques: A cubre 1 azulejo, B cubre 2 azulejos, C cubre 4, D 8, E 16, F 32 y G 64 azulejos. La idea consistía en utilizar el menor número de piezas de cada tipo y transcribir en una tabla el área – como un número natural – en base 2. Posteriormente se invita a los estudiantes a dibujar una superficie con área dada, por ejemplo, área 11011, utilizando A como unidad y posteriormente utilizando E como unidad. El cambio de unidades ocurre en un mismo sistema. El mismo tipo de ejercicio se hace en base 3 y posteriormente en base 10. Pero los estudiantes no hacían cambio de base.

Las operaciones de suma y multiplicación por un número natural con números con un punto decimal (base 2) eran estudiados en el mismo tipo de situación (medida de áreas con la ayuda de piezas). Después se preparaba a los estudiantes para la multiplicación clásica de dos decimales, sin la indicación de la unidad. Multiplicación por 10, 100, 1000 consistían en desplazar los dígitos en la tabla un lugar hacia la izquierda. La operación era justificada mediante el intercambio de piezas de un lugar al lugar inmediatamente superior.

La división consistía de un algoritmo inverso: $123.25 = 12325 \div 100$, pero no se mencionaba si eran números, medidas y en qué unidades se estaba trabajando.

El decimal, como antes, es introducido para representar una medida hecha con una unidad pequeña y expresada con la ayuda de otro múltiplo. El decimal es siempre un número natural concreto. El sistema métrico fue rechazado como dominio primario de significado para los decimales. El algoritmo de cálculo se presenta en forma clásica, pero la justificación del cálculo juega un rol mucho más importante. Se conservan las características típicas de los métodos de los 60 en los textos presentados como muy innovadores. Los decimales siguen siendo introducidos como mediciones, con cambios de unidades y posteriormente evaporación de las mismas. Eso hace posible comparar dos números naturales o decimales mediante algoritmos distintos pero dados sin justificación. Los números siguen siendo tratados como naturales. Los decimales no existen como entidades matemáticas sino como una trascripción de una entidad conocida.

La reforma de los 70, en contraste a las anteriores, se centró en la modificación de contenidos, la formulación, organización y en el orden de introducción del conocimiento matemático enseñado. Pero, aparte de cambio en el vocabulario, el concepto de enseñar decimales no cambió fundamentalmente. Esto nos lleva a inferir que las dificultades en su aprendizaje siguieron igual.

La historia describe distintas concepciones respecto a los decimales. En los tiempos antiguos los decimales fueron utilizados exclusivamente para mediciones y representación de cantidades, es decir, eran tratados como una noción *protomatemática* – su estructura es movilizada implícitamente para usos prácticos y sus propiedades son utilizadas para resolver ciertos problemas, pero no son reconocidos como objetos de estudio ni como herramienta.

Posteriormente el decimal se transformó en una noción *paramatemática*, reconocida como herramienta pero no tratada como objeto de estudio por su inventor al-Uqlidisi cerca del año 952. Finalmente Simon Stevin (1585) consideró al decimal como noción *matemática* y sirvieron como modelo heurístico en el análisis y en el cálculo.

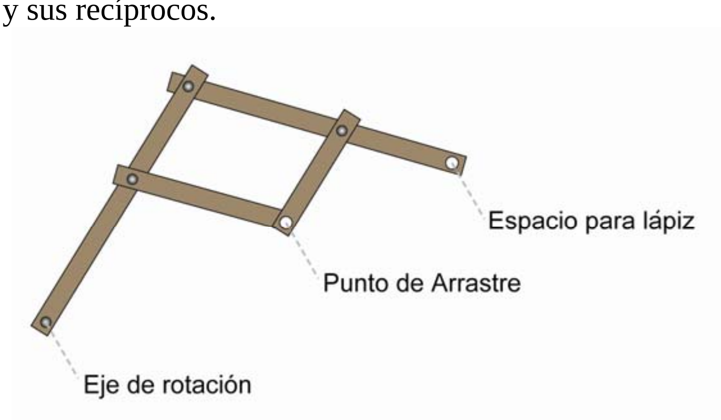
Brousseau (1997) comenta que la didáctica de los decimales tiene una larga historia. En los Estados Unidos se tomó la decisión de utilizar el sistema métrico y por lo tanto el sistema decimal de medida. Desde su aparecimiento en la enseñanza popular en Francia (1792) esta didáctica cambió en forma, inspiración y significado político. Este significado político y cultural pesa en la enseñanza de los decimales y en algunas ocasiones se convierte en un obstáculo real.

Algunas situaciones didácticas

A seguir ilustraremos algunas situaciones didácticas sugeridas por Brousseau para intentar superar los obstáculos relacionados con la didáctica de los números decimales.

1. El pantógrafo

El pantógrafo es un paralelogramo articulado que es utilizado para construir figuras que son transformaciones homotéticas a una figura dada. El aparato utilizado por el grupo de Brousseau consistió de juguetes plástico que son menos precisos que el aparato profesional (esta particularidad fue utilizada a propósito). Dependiendo de la escala de marcas, ellos pueden producir ciertas transformaciones homotéticas decimales precisas: 1.5, 2, 2.5, 3, 4 y sus recíprocos.



Durante la primera sesión los estudiantes aprenden a utilizar el aparato. Ellos intentan estirar y comprimir dibujos personales y posteriormente comparten sus observaciones y conjeturas. Entre ellas encuentran que pueden utilizar el pantógrafo para estirar o comprimir una figura al intercambiar el punto de arrastre con el punto para el lápiz, que una imagen dada no cambia de forma cuando se utilizan distintos pantógrafos, entre otras.

Consideremos la siguiente situación didáctica:

1. El docente muestra el pantógrafo a sus estudiantes, enseña como utilizarlo, presenta los distintos cálculos que son posibles de realizar: cálculo de imágenes, modelo de estiramiento, y los reproduce mediante ejercicios.
2. Cada estudiante utiliza su pantógrafo y sigue una guía con preguntas.
3. El docente desarrolla una situación más elaborada que consta de dos fases:

Fase de acción: El docente informa a los estudiantes que tendrán un minuto para escoger una longitud entre 1cm y 15cm, y cada estudiante (o pareja) tendrá que predecir la correspondiente longitud transformada por el pantógrafo. El aparato será utilizado para verificar si la predicción era exacta o no.

Fase de validación: Los grupos se compiten entre sí. A cada grupo se le pregunta si el pantógrafo de otro grupo funciona correctamente o no (el problema es que algunos pantógrafos son falsos, pero el grupo que lo tiene lo oculta para que el otro grupo no lo vea), basándose únicamente en la información de las mediciones dada por el grupo. Cada grupo solicita al otro grupo que muestre las imágenes de diferentes segmentos o figuras (que ellos escogen) producidas por el aparato. Si un miembro del grupo piensa que los resultados son falsos entonces el grupo del pantógrafo tiene que luchar para defender que los resultados dados son correctos. Cada grupo defenderá su conclusión como correcta mientras que su oponente intentará demostrar que es falsa.

Brousseau reporta que por lo general los estudiantes se convencen de que si el pantógrafo proporciona el estiramiento en una misma proporción, para cualquier segmento en todas las posiciones entonces la transformación es lineal debido a que la imagen de la suma es la suma de las imágenes.

En otra sesión los estudiantes (en parejas) utilizan un pantógrafo para construir una imagen de un dibujo mediante dos estiramientos sucesivos (por ejemplo, x2.5 seguido por x1.5). Esto corresponde a la composición de dos transformaciones lineales. Los estudiantes se convencen (implícitamente) de que tal composición conserva las formas.

En la sesión que sigue los estudiantes tienen que predecir las longitudes de varios segmentos que aparecen en una figura y que son obtenidos mediante la composición de transformaciones homotéticas. Ellos cuentan con las dimensiones del modelo y – si requerido – las longitudes de los segmentos de los lados estirados, o bien los decimales que designan la transformaciones lineales.

Modelo		Segundo dibujo		Tercer dibujo
4 → (x3)	→	12		
		3.5 →	(x1.5) →	5.25

Se les pide calcular la imagen de longitudes 2.5, 6, 2, 5.1, 15,6, 2.25. Los estudiantes utilizaron varios procedimientos para calcular la imagen.

P0) Procedimiento bastante largo. Vea la figura que sigue

4 →	12	
1 →	12/4=3	
2.5 →	3x2.5=7.5	
	2.5 →	3.75
	1 →	3.75/2.5=1.5
	7.5 →	7.5x1.5=11.25
2.5 →	→	11.25

P1) Por linealidad directa, sin cálculos intermedios.

4 → 12 → 12x1.5=18

1 → 18/4=4.5

2.5 → 2.5x4.5=11.25

P2) Composición de dos transformaciones lineales sin cálculos intermedios.

$$2.5 \xrightarrow[x3]{} 7.5 \xrightarrow[x1.5]{} 11.25$$

P3) Uso directo de composición de dos transformaciones:

$$\begin{array}{lcl} 2.5 & \longrightarrow & 11.25 \\ 1 & \longrightarrow & 4.5 \\ & & \\ 2 & \xrightarrow[x4.5]{} & 9 \end{array}$$

En esta se utilizó que la composición de dos transformaciones homotéticas es una transformación homotética.

La complejidad aumentó al pasarse de P0 a P3. Brousseau propone distintos niveles de conocimiento respecto a la composición de transformaciones lineales:

P0 se refiere al nivel más básico, nivel cero. Su estructura revela acciones del estudiante.

Nivel 1: Revela el reemplazo de la acción de una sucesión de transformaciones semejantes por una única (procedimiento P1).

Nivel 2: En este paso el estudiante afirma: "tengo el pantógrafo [x2.5] y [x0.25] tal que puedo calcular las imágenes con una única transformación: [x0.625]" calculada de una situación particular. (procedimiento P2)

Nivel3: El estudiante dice: "con dos pantógrafos [x4.5] y [x1/3] puedo predecir que el estiramiento será de [x4.5 x 1/3]". Utilizó un cálculo adicional. (P3)

Nivel 4: El estudiante dice: "Debo de ser capaz de reemplazar la acción de dos o más pantógrafos por la acción de un único, que puede ser calculado multiplicando".

Nivel 5: Parecido al anterior pero utilizando formulación especializada como "tome una fracción de …", "un porcentaje …".

Nivel 6: El estudiante concluye que:

Para estirar $\longrightarrow$ multiplique (o sume)

Para comprimir $\longrightarrow$ divida (o reste)

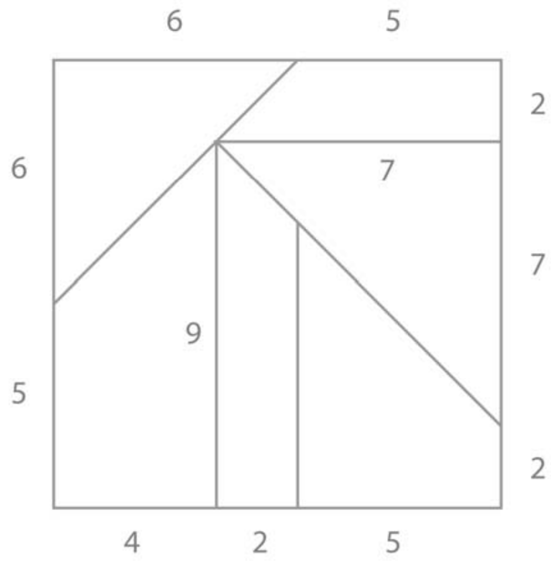
Considerando por ejemplo que [x 1/3] es el mismo operador que [$\div$3] en los enteros.

Nivel 7: Las operaciones son realizadas como un medio de análisis. Por ejemplo, la composición de una transformación con enteros y la inversa de una transformación con entero: (x 3/4)=(x3).(x1/4).

Nivel 8: Tomar el nivel 7 como objeto de estudio y describiendo la vía de formalización, utilizando lenguaje algebraico y teoría matemática axiomatizada. Este nivel era la intención original de los reformadores de los 1970 en Francia, pero que fracasó.

2. El rompecabezas

Para la nueva situación didáctica considere el siguiente rompecabezas:



Los estudiantes tienen que construir un modelo mayor, conforme a la siguiente regla: El segmento que mide 4 cm. en el modelo dado, medirá 7 cm. en su reproducción. Cada grupo de 4 o 5 estudiantes recibirá un rompecabezas, pero cada estudiante deberá construir al menos una pieza o bien un grupo de dos construirá dos piezas. Cuando el estudiante finalice será capaz de reconstruir figuras semejantes a la del modelo.

Después de una breve planificación en cada grupo, los estudiantes son separados. El docente fija una representación grande del rompecabezas en la pizarra. Al inicio lo más natural es suponer que hay que agregar 3 cm. a todas las dimensiones, pero al hacer esto las reproducciones no serán compatibles con el modelo original. El docente intervendrá únicamente para motivar a los estudiantes y verificar hechos. Lo importante es que los estudiantes se percaten que tienen que buscar otras estrategias, como por ejemplo, encontrar la imagen de 8 bajo la transformación: si 4 _____ 7 entonces 8 ____ 14. Esto los llevará a la necesidad de encontrar la imagen de 1 pues con esto podrían encontrar las imágenes de todos los otros segmentos. Entonces el 4 tiene que ser dividido en 4 partes y como 4 veces la imagen de 1 es 7 entonces la imagen de 1 es

$$\frac{7}{4} = 1.75$$

La siguiente tarea consiste en encontrar, en la misma situación, la imagen de una longitud fraccionaria. El estudiante puede verificar su predicción para fracciones simples mediante el uso de rompecabezas construidos. La situación del rompecabezas es del mismo tipo didáctico del pantógrafo, pero la predicción correcta entra en conflicto con un obstáculo epistemológico: la naturaleza del modelo aditivo.

Brousseau menciona que al inicio la situación se presenta a los estudiantes de forma inocente, familiar y sin misterios, pero que de pronto se dan cuenta de que los intentos de solución no funcionan. Así empieza el proceso científico: ellos tienen que buscar la causa. Cuando el obstáculo es vencido, aparece la solución y todos se sienten ganadores, sin la necesidad de la conducción del docente. El mérito de abandonar una idea encontrada falsa es mayor que la de encontrar directamente la idea verdadera.

Con el juego del rompecabezas se introducen las fracciones y los decimales mediante proporciones. Relaciona la geometría con las fracciones, los decimales y la medición. Además, en las situaciones didácticas anteriores ocurren naturalmente diferentes situaciones matemáticas: situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. Los decimales surgen como una regla de acción, como un lenguaje, como un sistema de argumentación respectivamente. Existen distintos modos de aprendizaje asociados con las distintas situaciones anteriores.

Decimales en los programas de estudio del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP)

En los programas de estudio 2005 publicados por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, denominados “Relanzamiento de la Educación Costarricense” encontramos referencias a los decimales en los programas de matemática del I y del II Ciclo.

A seguir describiremos la forma de acercarse a los decimales de acuerdo a los programas mencionados.

1. Matemática I Ciclo

En el programa Matemática I Ciclo leemos que “el manejo de los números y del sistema decimal de numeración, forma parte de los contenidos correspondientes a los primeros años de la escuela primaria. Su dominio constituye la base para lograr el acceso y la comprensión de otros contenidos, como las operaciones (suma, resta, multiplicación y división), las fracciones y los sistemas de medidas” (p. 36).

En el estudio del sistema de numeración decimal, se recomienda trabajar la etapa concreta con objetos que se puedan agrupar fácilmente y, además, recurrir al juego, como un recurso didáctico que haga el aprendizaje más agradable (p. 37); además, debido a que los órdenes posicionales del sistema decimal requieren de cantidades de elementos muy grandes, se sugiere trabajar con sistemas de base 2, 3, 4 y 5 que poseen las mismas propiedades y características del sistema de base 10. Por lo tanto podemos trabajar con objetos manipulables en el estudio de los sistemas de base 2,3,4 y 5 seguido de la generalización de las propiedades deducidas en ellos a la base 10 … el estudio de estos sistemas (de base 2,3,4 y 5) constituyen un auxiliar para llegar a entender claramente nuestro sistema decimal, y por ello, debemos tener en cuenta que por sí solos no tiene ningún sentido que pasen a formar parte de la gama de conocimientos de un niño de edad escolar.

Se sugiere introducir el sistema numérico en distintas bases mediante materiales concretos y juegos, principalmente el juego de las empacadoras, para lograr que el estudiante de tercer grado logre entender el valor posicional y los órdenes posicionales del sistema decimal. En la etapa semiconcreta es recomendable utilizar los bloques multibase de Diénes y a partir del cuarto grado es que son introducidos cambios de base 2,3, 4 y 5 a base 10 y finalmente de la transformación de una base a otra. Para ello hay que convertir el número dado a la base 10 y posteriormente recordar el número de elementos que posee cada orden en la nueva base, es decir, para escribir un número dado en una base α en la base β, se escribe α en la base 10 y posteriormente se pasa a la base β.

Todo lo anterior será utilizado para explicar los procesos de multiplicación y división de números enteros. En la división, por ejemplo, el dividendo se descompone en sus distintos órdenes y se procede a dividir a partir del mayor orden. El residuo es convertido al siguiente orden y se repite el procedimiento anterior. Para las divisiones aproximadas hay que utilizar subórdenes. Este proceso produce decimales con décimos, centésimos, etc., y supuestamente justifica el por qué se dice “se baja un cero” cuando se obtiene la expansión decimal del cociente.

Un objetivo correspondiente al sistema de numeración, en tercer año, consiste en construir el concepto de valor posicional en el sistema de numeración decimal (p. 152), utilizando inferencia de las reglas que rigen el sistema de numeración de base 10, de acuerdo con las de los sistemas posicionales de base 2, 3, 4 y 5.

En el glosario se define lo que es una expansión decimal (p. 176): “en la notación decimal de un número se distinguen dos partes: la parte entera formada por la expresión que se ubica a la izquierda de la coma decimal, y la expansión decimal, constituida por la expresión que se escribe a la derecha de esa coma”.

Esta definición es un poco confusa y recursiva pues aparece lo que se define (expansión decimal) en la propia definición.

2. Matemática II Ciclo

Uno de los objetivos para el II Ciclo consiste en utilizar algoritmos en la resolución de operaciones fundamentales y problemas, en el conjunto de los números naturales, fracciones y decimales.

Para el II Ciclo se recomienda aplicar todos los conocimientos adquiridos para construir la unidad, la decena y la centena de millar y la unidad de millón. Además, se aplicarán estos conocimientos como un instrumento para que los estudiantes comprendan el sistema de numeración decimal y los algoritmos posicionales de las cuatro operaciones básicas.

Para el cuarto grado, los objetivos del programa relacionados con decimales son:

- Aplicar el principio de agrupamiento de sistemas de numeración en otras bases (2, 3, 4 y 5) para la construcción de la decena de millar y su valor posicional en el sistema decimal.
- Determinar, operativamente, la expansión decimal de un número hasta milésimos.
- Aplicar la suma y la resta de números con expansión decimal.
- Resolver problemas de suma y resta de números con expansión decimal.

- Aplicar la multiplicación de números con expansión decimal, en la interpretación y resolución de ejercicios y problemas.
- Aplicar el concepto de fracción decimal, en la solución de problemas.

Para el quinto grado se agregan los objetivos:

- Comunicar la expansión decimal de un número hasta diezmilésimos.
- Aplicar la división de números naturales y números con expansión decimal, en la solución de ejercicios y problemas.
- Interpretar un número escrito en notación fraccionaria, como cociente de dos números naturales, para expresarlo en notación decimal (con periodo cero) y notación mixta.

Mientras que para el sexto grado se añaden:

- Interpretar el valor (numérico) de los dígitos, según la posición en el sistema decimal.
- Reconocer números con expansión decimal que sobrepase la diezmilésima.
- Aplicar números naturales, y con expansión decimal, en la resolución de ejercicios y problemas.
- Aplicar el concepto de tanto por ciento (escritura en notación decimal y fraccionaria) en la solución de ejercicios y problemas.

Es de extrañarse que en ningún lugar del programa mencione explícitamente - entre los objetivos - el expresar un número escrito en notación fraccionaria en notación decimal con periodo mayor que cero. Esto podría ser tratado mediante aproximaciones, sin tener la necesidad de hablar de expansión decimal infinita.

3. Matemática III Ciclo

En el tercer ciclo se supone que las y los estudiantes asimilaron bien la noción de números decimales. En este ciclo los docentes deben dar mucho énfasis en la realización de operaciones con números reales expresados en cualesquiera de las notaciones estudiadas: notación decimal, fraccionaria, exponencial, radical.

Para el séptimo año, para introducir el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, se sugiere analizar las características que presenta la expansión decimal de un número y su relación con la notación fraccionaria.

En noveno año son introducidos los números irracionales, y uno de los objetivos consiste en reconocer números irracionales en notación decimal, en notación radical y otras notaciones particulares. En este caso, uno de los procedimientos indicados es el de identificar los números con expansión decimal infinita no periódica, como números irracionales.

Debido a la ausencia explícita de tratar con expansiones decimales con periodo mayor que cero, se hace inevitable una generalización de los números decimales para tratar con estos casos no desarrollados en los ciclos anteriores, antes de identificar los irracionales con los decimales con expansión decimal infinita no periódica.

4. Matemática Educación Diversificada

En la educación diversificada no se hacen nuevos acercamientos a los números decimales. La única mención que se hace de los decimales en los programas de décimo y de undécimo año es la que aparece en el glosario: "Expansión decimal: Está constituida por el conjunto de dígitos que se expresan a la derecha de la coma decimal, al representar un número racional en notación decimal. La expansión decimal de los números racionales siempre es infinita periódica. En algunos casos, cuando el período es igual a cero, se puede decir que es finita ejemplo: 0,375".

Consideramos que es importante revisitar los números decimales en la educación diversificada con el fin de:

- Detectar concepciones inadecuadas adquiridas por los y las estudiantes.
- Tratar con expansiones decimales en bases distintas de 10.
- Ligar los decimales con proporciones.
- Resolver problemas de geometría y trigonometría que demanden el uso de aproximaciones decimales para números racionales e irracionales.

Conclusiones

Los programas de matemática del MEP introducen los decimales en el I Ciclo mediante juegos y materiales concretos. En este sentido la estrategia metodológica se parece a la utilizada por Brousseau.

Como mencionamos anteriormente, en las situaciones didácticas sugeridas por Brousseu ocurren naturalmente situaciones de acción, formulación, validación y de institucionalización, que coadyuvan distintos modos de aprendizaje.

Otro factor que consideramos importante es la falta de conexión temprana de los decimales con las unidades de medidas del sistema métrico decimal. Esto evita algunos de los obstáculos mencionados por Brousseau.

Algunas diferencias entre las metodologías sugeridas por el MEP y las utilizadas por Brousseau y por Steinle se relacionan con:

- La importancia del estudio de la densidad de los números decimales. Este es un aspecto que se encuentra ausente en los programas del MEP.
- La conversión de un número entre bases distintas de 10, sin tener que utilizar la base 10 como intermediaria.
  La misma idea de los agrupamientos puede ser utilizada para lograr un cambio de base sin la mediación de la base 10.

Además, pensamos que es factible y necesario trabajar con expansiones decimales en otras bases distintas de 10. Esto puede ser llevado a cabo en noveno o décimo año y tiene aplicaciones en áreas matemáticas actuales, como por ejemplo en el estudio de los fractales. Las situaciones didácticas sugeridas por Brousseau, el trabajo de Steinle, y los programas del MEP no tratan con este tema.

En su trabajo, Steinle (2004) recomienda a los profesores que sean cuidadosos al introducir los números negativos debido a que puede interferir en el pensamiento de los estudiantes acerca de los decimales. También la introducción de notación científica para números pequeños, como por ejemplo 2.53×10^{-8} puede reforzar la idea de que los decimales están asociados con los números negativos de alguna forma. También – como mencionamos en este mismo acápite - es importante abordar el problema de la densidad de los números decimales y ser cuidadoso con los redondeos sin aclaraciones pues puede reforzar la creencia de que los decimales forman un sistema discreto.

Referencias

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática I Ciclo*. Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática II Ciclo*. Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática III Ciclo*. Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática Educación Diversificada*. Costa Rica.

Steinle, V. (2004). Changes with age in students'misconceptions of decimal numbers. Disertación doctoral no publicada, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne. Australia.